Keine Ahnung von geometrischen Reihen

Was sind

Geometrische Reihen

?

Datei Nr. 40052

Stand 9. Mai 2020

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ist eine kurze Einführung ist die wichtigsten Fakten zu geometrischen Reihen.
Er ist zur Wiederholung gedacht. Eine gründliche Einführung mit vielen Übungsaufgaben und Musterlösungen findet man im Text 40040.

Wer eine Wiederholung zum Thema geometrische Folgen braucht, die hier vorausgesetzt werden, kann im Text 40016 (Keine Ahnung von geometrischen Folgen) oder im Text 40012 (gründliche Einführung) nachlesen.

Inhalt

1 Eine Reihe ist …

eine Zahlenfolge, deren Glieder die Teilsummen einer Folge sind.

1. Beispiel: Gegeben sei die geometrische Folge $a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, also $\{16;8;4;2;1;\frac{1}{2};...\}$.

Daraus bilden wir eine ***Folge von Teilsummen*** (eine Teilsumme beginnt immer bei a_1).

1. Teilsumme: $s_1 = a_1$ mit Zahlen: $s_1 = 16$

2. Teilsumme: $s_2 = a_1 + a_2$ $s_2 = 16 + 8 = 24$

3. Teilsumme: $s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{s_2} + a_3$ $s_3 = \underbrace{16 + 8}_{24} + 4 = 28$

4. Teilsumme: $s_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{s_3} + a_4$ $s_4 = \underbrace{16 + 8 + 4}_{28} + 2 = 30$

5. Teilsumme: $s_5 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{s_4} + a_5$ $s_5 = \underbrace{16 + 8 + 4 + 2}_{30} + 1 = 31$

…..

n-te Teilsumme: $s_n = \underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n$ $s_n = 16 + 8 + ... + 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{32 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$

Doch wie habe ich es geschafft, diese Summe s_n zu berechnen? Das zeige ich gleich.

Merke:

(1) Eine Reihe ist eine Folge von Teilsummen

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ **oder** $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

(2) Jede Reihe kann rekursiv so berechnet werden:

$s_n = s_{n-1} + a_n$ **oder** $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$

(3) Die explizite Summenformel für die geometrische Reihe lautet:

$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}$ falls $q < 1$ **oder** $\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$ falls $q > 1$

Der Beweis dieser Summenformel steht im Text 40050 auf Seite 15.

Die zweite Summenformel entsteht aus der ersten, indem man den Bruch mit (-1) erweitert.
Diese Formel ist also im Grunde nicht notwendig. Für q>1 ist sie jedoch besser zu handhaben.

Anwendungsbeispiel für die gegebene Folge / Reihe:

$$s_n = 16 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 32 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Also z. B.: $s_{10} = 32 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right] \approx 31{,}96875$

$s_{30} = 32 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right] \approx 31{,}99999997$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 0.0009765625

$32 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$ 31.96875

$32 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right)$ 31.99999997

2 Formen von Aufgaben

1 Gegeben ist die Folge $a_n = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Berechne a_1 bis a_4 sowie s_1 bis s_4

Stelle die Formel für s_n auf. Berechne damit s_4 zur Kontrolle.

Lösung: Man entnimmt der Formel: $q = \frac{1}{3}$

$a_1 = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12$ $\qquad s_1 = a_1 = 12$

$a_2 = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{36}{9} = 4$ $\qquad s_2 = a_1 + a_2 = 12 + 4 = 16$

$a_3 = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$ oder $a_3 = a_2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ $\qquad s_3 = s_2 + \frac{4}{3} = 16 + \frac{4}{3} = \frac{52}{3}$

$a_4 = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$ oder $a_4 = a_3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ $\qquad s_4 = s_3 + a_4 = \frac{52}{3} + \frac{4}{9} = \frac{160}{9}$

Allgemein: $$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 12 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = 12 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 18 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

Kontrolle: $$s_4 = 18 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^4\right] = 18 \cdot \left[1-\frac{1}{81}\right] = 18 \cdot \frac{80}{81} = 2 \cdot \frac{80}{9} = \frac{160}{9}$$

2 Berechne $1 + 4 + 16 + \ldots + 4^{10}$.

Lösung:

Zuerst sollte man die zugrunde liegende geometrische Folge genau identifizieren:

es ist $a_1 = 1$, $q = 4$ (denn der Quotient aufeinanderfolgender Zahlen ist immer 4).

Ferner werden 11 Zahlen der Folge aufsummiert, was man so erkennt:

Man kann die Summe auch so schreiben: $4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{10}$,

also liegen 11 Summanden vor. Jetzt verwendet man die Summenformel:

$$s_{11} = 1 \cdot \frac{4^{11}-1}{4-1} = \frac{4^{11}-1}{3} = 1398101$$

3 Berechne $4 + 2 + 1 + \ldots + {}^1/_{32}$.

Lösung:

Identifizierung der geometrischen Folge: $a_1 = 4$; $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ und $\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2} = q$.

Um die Anzahl der Summanden zu ermitteln, schreibt man in diesem Fall alle Zahlen der Folge als Zweierpotenzen: $2^2 + 2^1 + 2^0 + \ldots + 2^{-5}$. Durch Subtraktion der Exponenten 2 – (-5) = 7 erhält man die Anzahl der Zwischenräume (also der Pluszeichen), folglich ist n = 8.

$$s_8 = 4 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} = 8 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right] = 8 \cdot \left[1-\frac{1}{256}\right] = 8 \cdot \frac{255}{256} = \frac{255}{32}$$

4 Berechne $3-\frac{3}{5}+\frac{3}{25}-+\ldots+\frac{3}{390.625}$.

Lösung:

Identifizierung der Folge: $a_1=3$; $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{3}{5}}{3}=\frac{-3}{5\cdot 3}=-\frac{1}{5}$

Und noch eine weitere Quotientenkontrolle: $q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{3}{25}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{3}{25}\cdot\frac{5}{3}=-\frac{1}{5}$

Berechnung von n: Man bestimmt mittels Taschenrechner, welche Fünferpotenz die Zahl 390 625 ist und entdeckt $5^8 = 390\,625$.

Da zu a_1 der Nenner $5^0 = 1$ „gehört" und der letzte Nenner 5^8 ist, liegen 9 Summanden vor.

Also kann man die Summe s_9 berechnen:

$$s_9=3\cdot\frac{1-(-\frac{1}{5})^9}{1+\frac{1}{5}}=3\cdot\frac{1-(-\frac{1}{5})^9}{\frac{6}{5}}=3\cdot\tfrac{5}{6}(1+\left(\tfrac{1}{5}\right)^9)=\tfrac{5}{2}(1+\left(\tfrac{1}{5}\right)^9)\approx 2{,}500.001.3$$

5 Umkehrung der Fragestellung:

Gegeben ist eine geometrische Reihe durch $s_n=8-0{,}5^{n-3}$.

Welche geometrische Folge liegt ihr zugrunde?

Lösung:

Methode: Man berechnet zuerst s_1 und s_2:

$s_1=8-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=8-2^2=4$ d. h. $a_1 = 4$ (1) ($s_1 = a_1$!)

$s_2=8-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=8-2=6$ d. h. $a_1+a_2=6$ (2)

Aus (2) – (1) folgt $a_2 = 2$.

Also gilt $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=4\cdot(\tfrac{1}{2})^{n-1}=2^2\cdot 2^{-n+1}=2^{3-n}=\frac{8}{2^n}$$

6 Welche geometrische Folge hat die Partialsumme $s_n=2^{n-1}-\frac{1}{4}$?

Lösung:

Aus $s_1=2^O-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ folgt: $a_1=s_1=\frac{3}{4}$ (1)

Aus $s_2=2^1-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ folgt: $a_1+a_2=\frac{7}{4}$ (2)

(2) - (1): $a_2=\frac{7}{4}-a_1=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$

Daraus folgt: $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$

Man erhält daher: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=\boxed{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$

Man kann vereinfachen: $a_n=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{3}{4}=\boxed{\frac{9}{16}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n}$

3 Unendliche geometrische Reihe

Auf Seite 3 wurde im Einführungsbeispiel die Folge $a_n = 32 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$ untersucht.

Zu ihr gehört die geometrische Reihe $s_n = 32 \cdot \left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right]$

Damit kann man beliebige Glieder der Reihe (Teilsummen der Folge) berechnen:

Also z. B.: $s_{10} = 32 \cdot \left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10}\right] \approx 31{,}96875$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 0.0009765625

$32 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$ 31.96875

$s_{30} = 32 \cdot \left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{30}\right] \approx 31{,}99999997$

$32 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right)$ 31.99999997

Es fällt auf, dass sich die Reihe offenbar dem Grenzwert s = 32 nähert.

Das erkennt man besser, wenn man die Summenformel aufspaltet:

Aus $s_n = 32 \cdot \left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right]$ wird $s_n = 32 - \boxed{32 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n}$

Der eingerahmte Term wird von 32 subtrahiert. Man kann ihn hier noch deutlich vereinfachen:

$$32 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 2^5 \cdot \frac{1}{2^n} = 2^{5-n} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2^{n-5}}$$

Also haben wir schon die erste Erkenntnis: Dieser zu subtrahierende Term ist stets positiv und wird immer kleiner, je größer n wird.

2^{-25} 0.0000000298

Für n = 30 hat er den Wert $\frac{1}{2^{25}} \approx 0{,}000.000.029.8$.

So dicht sind wir also mit s_{30} beim Grenzwert 32!

Das kann man ganz allgemein betrachten:

Die Summenformel lautet bei geometrischen Reihen: $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Man kann zeigen: Wenn $|q| < 1$, dann geht $q^n \to 0$ für $n \to \infty$.

Das schreibt man so auf: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (Der Grenzwert von q^n ist 0 für $n \to \infty$.

Ja, was passiert dann mit s_n? Lassen wir einfach q^n weg, dann haben wir den

Grenzwert für die geometrische Reihe: $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ bzw. $\boxed{s = \frac{a_1}{1-q}}$

Den Grenzwert der geometrischen Reihe nennt man „**unendliche geometrische Reihe**“

Er existiert nur wenn $|q| < 1$ ist, also – 1 < q < 1.

q = 0 können wir dabei weglassen, weil dann die Reihe nur aus Nullen besteht.

Nun einige Beispiele.

7 Berechne die zur geometrischen Folge $a_n = 20 \cdot 4^{-n}$ gehörende unendliche Reihe.

Lösung: Zuerst berechne ich einige Glieder der Folge:

$$a_1 = 20 \cdot 4^{-1} = \frac{20}{4} = 5\,,\quad a_2 = \frac{20}{4^2} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}\,,\quad a_3 = \frac{20}{4^3} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}\,, \dots.$$

Diese Folge hat den Grenzwert 0, weil $q = \frac{1}{4}$ ist.

Die ersten drei Reihenglieder sind: $s_1 = a_1 = 5$, $s_2 = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$. $s_3 = \frac{25}{4} + \frac{5}{16} = \frac{105}{16}$

Die geometrische Reihe lautet: $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 5\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = 5\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{3} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

Die unendliche geometrische Reihe ist davon der Grenzwert für $n \to \infty$.

1. Möglichkeit: Unter Verwendung von $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ folgt: $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{20}{3} \cdot (1-0) = \frac{20}{3}$

2. Möglichkeit: Verwendung der Formel: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{3}{4}} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$.

8 $a_n = 3^{4-n}$

Dieser Term ist etwas ungewohnt. Man kann ihn umformen zu: $a_n = 3^4 \cdot 3^{-n} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Die ersten drei Glieder sind: $a_1 = 3^{4-1} = 3^3 = 27$, $a_2 = 3^2 = 9$, $a_3 = 3^1 = 3$ usw.; $q = \frac{1}{3}$.

Geometrische Reihe: $s_1 = 27$, $s_2 = 27 + 9 = 36$, $s_3 = 36 + 3 = 39$ usw.

Unendliche geometrische Reihe: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \frac{81}{2}$

9 $a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n$ Es ist $q = -\frac{1}{5}$.

Dies ist eine alternierende Reihe: $a_1 = -\frac{3}{5}$, $a_2 = 3 \cdot \frac{1}{25} = \frac{3}{25}$, $a_3 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{125}\right) = -\frac{3}{125}$, ...

Geometrische Reihe:

$$s_1 = -\frac{3}{5},\quad s_2 = -\frac{3}{5} + \frac{3}{25} = -\frac{15}{25} + \frac{3}{25} = -\frac{12}{25},\quad s_3 = -\frac{12}{25} - \frac{3}{125} = -\frac{60}{125} - \frac{3}{125} = -\frac{63}{125}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{6}{5}} = -\frac{1}{2} \cdot \left[1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

Unendliche geometrische Reihe: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{3}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

Man sollte wissen, was das bedeutet:

Die oben begonnene geometrische Reihe nähert sich den Wert $-\frac{1}{2}$ an, wenn $n \to \infty$.

Das heißt die immer länger werdende Summe der Folgenglieder hat den Grenzwert $\frac{1}{2}$.

10 $a_n = 5 \cdot 2^n$ ist auch eine geometrische Folge mit q = 2.

Einige Folgenglieder: $a_1 = 10$; $a_2 = 20$; $a_3 = 40$; $a_4 = 80$; ....

Diese Folge geht gegen Unendlich, also auch ihre geometrische Reihe:

$s_1 = 10$; $s_2 = 10 + 20 = 30$; $s_3 = 30 + 40 = 70$; $s_4 = 70 + 80 = 150$; ...

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}} \Rightarrow s_n = 10 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \boxed{10 \cdot \left[2^n - 1\right]}$$

Weil q > 1 ist, hat diese Reihe keinen Grenzwert.

Die unendliche geometrische Reihe geht gegen Unendlich.

11 $a_n = 4^{2n-1}$ Umschreiben: $a_n = 4^{2n} \cdot 4^{-1} = \left(4^2\right)^n \cdot 4^{-1} = 16^n \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{16^n}{4}}$

Folge: $a_1 = \frac{16}{4} = 4$, $a_2 = \frac{16^2}{4} = 64$; $a_3 = \frac{16^3}{4} = 1024$, ...

Reihe: $s_1 = 4$; $s_2 = 4 + 64 = 68$; $s_3 = 68 + 1024 = 1692$, ...

Folge und Reihe haben keinen Grenzwert.

12 Periodische Dezimalzahlen sind unendliche geometrische Reihen:

$s = 0{,}\overline{3} = 0{,}33333...$ kann man als Summe so schreiben:

$s = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + ...$ mit $a_1 = 0{,}3$ und $a_2 = 0{,}03$ d.h. $q = \frac{1}{10}$

Es folgt $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$ Ergebnis: $\boxed{\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}}$

13 $s = 0{,}252525... = 0{,}\overline{25}$ soll als Bruch dargestellt werden.

Darstellung als Summe: $s = 0{,}25 + 0{,}0025 + 0{,}00.00.25 + ...$

ist eine unendliche geometrische Reihe mit $a_1 = 0{,}25$ und $q = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Es folgt: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}25}{1-0{,}01} = \frac{0{,}25}{0{,}99} = \frac{25}{99}$ Ergebnis: $\boxed{0{,}\overline{25} = \frac{25}{99}}$

14 $s = 0{,}05\overline{1} = 0{,}051111....$ soll als Bruch dargestellt werden.

Die Dezimalzahl hat eine Vorziffer, die nichts mit der Periode zu tun hat. $a_o = 0{,}05$

Die unendliche Reihe sieht dann so aus:

$$s = \underbrace{0{,}05}_{a_o} + \underbrace{0{,}001}_{a_1} + \underbrace{0{,}000\,|\,1}_{=a_1 \cdot 0{,}1} + \underbrace{0{,}0000\,|\,1}_{=a_2 \cdot 0{,}1} + \underbrace{0{,}00000\,|\,1}_{=a_3 \cdot 0{,}1} + ...$$

Mit $q = 0{,}1$ folgt:

$$s = 0{,}05 + \frac{0{,}001}{1-0{,}1} = 0{,}05 + \frac{0{,}001}{0{,}9} = \frac{5}{100} + \frac{1}{900} = \frac{45+1}{900} = \frac{46}{900} = \frac{23}{450}$$

Ergebnis: $\boxed{0{,}05\overline{1} = \frac{23}{450}}$